Приложение 6. О выражении идеи L-противоречия в теории множеств

Общепринятый на сегодня в теории множеств способ разрешения трудностей, возникающих в случае «больших» множеств типа множества всех множеств, основан на наложении тех или иных ограничений, позволяющих *элиминировать* из аксиоматической теории противоречивые формулы наивной теории множеств.

Предлагаемый ниже подход исходит из принципиально иной идеологии. Предполагается, что в рамках наивной теории множеств можно выделить два класса противоречий – противоречия-ошибки и своего рода «необходимые» противоречия, связанные с феноменом ментальной предельности таких объектов как множество Рассела. В связи с такого рода утверждением естественно возникает вопрос о «критерии логической демаркации» этих двух видов противоречий и возможности совмещения второго класса противоречий с законами формальной логики («проблема согласования»). Второй класс противоречий назван мной «L-противоречиями» (от «limit» – предел), и демонстрируемая ниже техника может быть проинтерпретирована как решение сформулированных выше двух проблем – «критерия демаркации» и «проблемы согласования».

Конкретизируем теперь описанный в Приложении 5 подход применительно к теории множеств. Пусть S – какая-либо аксиоматическая теория множеств, являющаяся t-предельной теорией относительно некоторого теоретико-множественного универсума U∞ (под теоретико-множественным универсумом здесь понимается семейство множеств, замкнутое относительно некоторых первичных операций порождения множеств в теории S). Напомним, что множество Х называется пределом последовательности множеств {Xn}n=0∞ , что записывается в виде limXn = X, тогда и т.т., когда

 ∩n=0∞ (∪k=n∞ Xk) = ∪n=0∞ (∩k=n∞ Xk) = X.

В этом случае над S может быть построена f-предельная теория S\*.

Пытаясь выразить в S\* парадокс Рассела как L-противоречие, предъявим к теории S следующие дополнительные требования:

1)моделью теории S является некоторый теоретико-множественный универсум U∞, в рамках которого можно выделить бесконечную последовательность U0, U1, U2, … “малых” теоретико-множественных универсумов, где Ui⊆Ui+1 и Ui≠Ui+1, i=0,1,2,…, и =U∞.

2)для универсумов U0, U1, U2, … в языке L(S) теории S имеются имена **U0**, **U1**, **U2**, … соотв., и в S верна схема аксиом **x**⊆**Un**∧**x**∉**Un** → **x**∈**Un+1**, где **Un**, **Un+1** – переменные метаязыка, пробегающие имена **U0**, **U1**, **U2**, ….

3)для каждого терма **Х** = {**x**: **ϕ**(**x**)} наивной теории множеств NS (под “наивной теорией множеств” здесь можно понимать, например, “идеальное исчисление” **К** и его расширения, как они сформулированы в [27] – см. [27, с.171-172]), где **ϕ**(**x**) – формула теории NS, свободно содержащая переменную **x**, в языке L(S) теории S существует ранговый терм **Хn**={**x∈Un:** **ϕ**(**x**)}, n=0,1,2,….

4)последовательности {**Хn**}**n**=0∞ ранговых термов – также термы t-предельной теории S.

В этом случае можно легко показать, что эти последовательности являются предельными последовательностями (т.к. **Хn** ⊆ **Хn+1** – теорема теории S), т.е. для них определены предельные термы **Х∞**, являющиеся термами языка L(S) теории S.

Для множества Рассела **R**=**{x: x∉x}** из наивной теории множеств NS определена в теории S бесконечная предельная последовательность ранговых множеств Рассела, **Rn**=**{x∈Un: x∉x}**, с предельным термом **R∞**, для которого в S предполагается выводимой теорема **R∞**=**Rn**. В предположении непротиворечивости теории S, можно в этом случае показать, что формулы **Rn∉Rn** и **Rn∈Rn+1** являются теоремами теории S для любых n=0,1,2,…. Тогда последовательность формул {**Rn∉Rn** ∧ **Rn∈Rn+1**} является L-противоречием – как формула теории S\*. В самом деле, теорема **Rn∈Rn+1** может быть представлена в виде

 **An** = **х1∈х2 x1, x2** [**Rn, Rn+1**], что является частным случаем формул вида (\*) из Приложения 5.

В этом случае формула **Rn∉Rn** может быть представлена как ╕**An** – слабое отрицание теоремы **An**, также являющаяся теоремой S. В самом деле, для **Rn∉Rn** можем записать:

 ╕**An** = **Rn∉Rn** = ⎤(**х1∈х2**) **x1, x2** [**Rn, Rn**],

что отлично от сильного отрицания ⎤(**х1∈х2**) **x1, x2** [**Rn, Rn+1**] теоремы **Rn∈Rn+1** только сдвигом по номеру второго подставляемого терма.

Через L-противоречивую формулу {**Rn∉Rn** ∧ **Rn∈Rn+1**} может быть проинтерпретировано разрешение проблемы парадокса Рассела.

Предельная формула **R∞∉R∞∧R∞∈R∞** может быть рассмотрена в этом случае как выражение идеи трансрационального синтеза, в котором доведены до предела (тотализованы) две дополнительные предикации **Rn∉Rn** и **Rn∈Rn+1** (являющиеся предикациями символа трансцендентного **Rn∉Rn∧Rn∈Rn+1**), становящиеся формально-несовместимыми в пределе своей тотализации.

На указанных конструкциях можно проиллюстрировать и идею ментальной пропорции, которая для случая конкретных формул, выражающих парадокс Рассела, приобретет вид

 **Rn∉Rn** = **limRn∉Rn**

 **Rn∈Rn+1** **limRn∈Rn+1**

– пропорции, представляющей символически факт выражения отношения формул **limRn∉Rn** и **limRn∈Rn+1** отношением формул **Rn∉Rn** и **Rn∈Rn+1** в бесконечной предельной последовательности.