Приложение 5. Об одном методе введения L-противоречий на формальных теориях

Пусть Т – формальная теория с языком L (мы опираемся здесь на вариант построения математической логики, как он дан в [30]). Пусть для теории Т определена некоторая модель А, включающая в себя множество натуральных чисел **N** (вместе с нулем). Предположим также, что в теории Т выводимы формулы, которые могут быть сокращены метавыражениями вида «**a(n) = a**» и проинтерпретированы на А как равенство предела последовательности индивидов из А {an} индивиду а из А. Тем самым предполагается, что в структуре А есть, как минимум, два сорта индивидов – индивиды первого сорта (типа an и a), и индивиды второго сорта как предельные последовательности индивидов первого сорта. Пусть **n** – терм в L для обозначения натурального числа n, и формула **Аn** – формула из L вида:

 (\*) **An** = **A** **x1, x2, …, xm** [**a1n ± p1, a2n ± p2, …, amn ± pm**], где pj ∈ **N**, j=1,…,m

Это означает, что формула **An** – это результат подстановки на места переменных **x1, x2, …, xm** в формулу **A** соответственно термов **a1n ± p1, a2n ± p2, …, amn ± pm**, каждый из которых является элементом бесконечной последовательности {**ajk**}, и в теории Т выводимы теоремы вида:

 **ajn = aj**

для каждого j. Предположим также, что в формуле **An** больше не встречается термов указанного вида, кроме термов **a1n ± p1, a2n ± p2, …, amn ± pm**.

Такого рода теорию Т будем называть «t-предельной теорией» (t – от “term”) относительно структуры А. В качестве примеров t-предельных теорий можно привести теорию множеств, в которой могут быть определены пределы последовательностей множеств, теорию вещественных чисел, где могут быть определены предельные последовательности на вещественных числах.

Пусть Т – t-предельная теория с языком L. Построим для теории Т некоторую теорию Т\* с языком L\* по следующим правилам. Для формул **Аn** вида (\*) определена последовательность {**Аn** }. Положим по определению:

 **А∞** = **Аn** = **A** **x1, x2, …, xm** [**a1n**, **a2n** ,…,**amn**]

Это определение позволяет свести понятие предела формулы к пределам термов, входящих в эту формулу. Последовательности {**Аn** } формул **Аn** вида (\*), а также стационарные последовательности из формул языка L будем называть «предельными последовательностями формул» из L. Построим язык L\* как множество тех же термов, что и в языке L, и множество всех предельных последовательностей формул из L. Язык L может быть вложен в язык L\* на основе такого инъективного отображения χ: L→ L\*, что, если **а** – терм из L, то χ(**а**)=**а**; если же **А** – формула из L, то χ(**А**) – это стационарная последовательность из формул **А**. Предельные последовательности формул {**Аn** } будем называть “формулами” языка L\* (таким образом, языки L и L\* не различаются между собою алфавитами и множествами термов, но только множествами формул).

Для языка L\* введем логические операторы отрицания (⎤), конъюнкции (∧), дизъюнкции (∨), кванторов существования (∃) и всеобщности (∀) по следующим правилам:

 ⎤{**Аn** } = {⎤**Аn** }

 {**Аn** } ∧ {**Вn** } = {**Аn** ∧ **Вn** }

 {**Аn** } ∨ {**Вn** } = {**Аn** ∨ **Вn** }

 ∃**х**{**Аn** } = {∃**хАn** }

 ∀**х**{**Аn** } = {∀**хАn** }

Можно показать, что верны следующие соотношения:

 ⎤**Аn** = ⎤**Аn**

 **Аn** ∧ **Вn** = **Аn** ∧**Вn**

 **Аn** ∨ **Вn** = **Аn**∨**Вn**

 ∃**х****Аn** = ∃**хАn**

 ∀**х****Аn** = ∀**хАn**

Используя язык L\*, построим на его основе теорию Т\*. Именно, положим, что предельная последовательность формул {**Аn** } – как формула языка L\* – является теоремой теории Т\*, если найдется такое m≥0, что для любого n≥m формула **Аn** является теоремой теории Т. С этой точки зрения логика теории Т\* обобщает логику теории Т в следующем смысле: если **А** – теорема теории Т, то χ(**А**), как стационарная последовательность из формул **А**, является теоремой теории Т\*. В простейшем случае теория Т\* может пониматься как множество своих теорем. Теорию Т\* будем называть «f-предельной теорией» (f – от “formula”). Описанная выше техника может быть теперь рассмотрена как методология построения f-предельных теорий на основе t-предельных теорий.

Логика теории Т\* богаче формальной логики теории Т. В частности, в рамках логики теории Т\* могут быть введены два вида отрицания – «сильное» отрицание ⎤ и «слабое» отрицание ╕. Сильное отрицание было определено выше, рассмотрим теперь слабое отрицание. Пусть дана предельная последовательность формул {**Аn**}, где формулы **Аn** имеют вид (\*). В этом случае под формулой ╕**Аn** будем иметь в виду формулу

╕**An** = ⎤**A** **x1, x2, …, xm** [**a1n ± S1, a2n ± S2, …, amn ± Sm**], где sj ∈ **N**, j=1,…,m,

где термы **ajk** взяты из предельных последовательностей {**ajk**}, т.е. ╕**An** = ⎤**An**, и, если {**Аn**} – теорема теории Т\*, то ее слабое отрицание ╕{**Аn**} = {╕**Аn**} – также теорема теории Т\*.

Из определения слабого отрицания видно, что это отрицание отличается от сильного отрицания только сдвигами по номерам подставляемых термов: вместо термов **ajn ± рj** используются термы **ajn±Sj**. Отсюда следует, что для стационарных последовательностей теорем слабое отрицание не определено, так как стационарные последовательности предполагают либо стационарные последовательности подставляемых термов, в связи с чем сдвиг по номерам не даст различия термов, либо вообще не содержат несвязанных термов.

Если для предельной последовательности формул {**Аn**} в L\* определено слабое отрицание ╕{**Аn**}, и {**Аn**} – теорема теории Т\*, то конъюнкцию {**Аn**}∧ ╕{**Аn**}={**Аn**∧╕**Аn**}, которая в пределе дает противоречие **А∞**∧⎤**А∞**, но, тем не менее, является теоремой теории Т\*, можно называть L-противоречием (L – от “limit”). Именно через L-противоречия могут быть выражены антиномии наивной теории множеств. Средства теории Т\* дают нам теперь возможность различать противоречия-ошибки и L-противоречия. Противоречие-ошибка – это конъюнкция с сильным отрицанием, которая не может быть теоремой теории Т\* (предполагается, что теория Т непротиворечива); L-противоречие – конъюнкция со слабым отрицанием, являющаяся теоремой теории Т. Тем самым мы получаем критерий логической демаркации.